На правах рукописи

Коломыцева Елена Алексеевна

ARG-деформации поверхностей положительной внешней кривизны с краем в римановом пространстве при внешних связях

01.01.04 - геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО
«Таганрогский государственный педагогический институт имени А.П. Чехова»
на кафедре алгебры и геометрии

Научный руководитель:	Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор *Фоменко Валентин Трофимович.*
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор *Бикчантаев Ильдар Ахмедович;* доктор физико-математических наук, профессор *Кокарев Виктор Николаевич.*
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет»

Защита состоится 21 февраля 2013 года в 14:30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан ____ января 2013 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физико- математических наук, доцент	Липачёв Евгений Константинович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из важных разделов дифференциальной геометрии «в целом» является теория деформаций поверхностей в трехмерном евклидовом и римановом пространствах.

Бесконечно малые деформации занимают значительное место в теории деформаций двумерных поверхностей. Из геометрических и механических соображений целесообразно изучать бесконечно малые деформации поверхностей, для которых некоторые геометрические характеристики поверхности имеют наперед заданные значения вариаций. К настоящему времени достаточно полно изучены бесконечно малые изгибания поверхностей, характеризующиеся условием $\delta(ds^2)=0$, где ds^2 - первая квадратичная форма поверхности; бесконечно малые деформации поверхности с сохранением поточечно сферического образа поверхности, характеризующиеся условием $\delta\vec{n}=0$, где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали поверхности (эти деформации коротко называют бесконечно малыми G-деформациями); бесконечно малые деформации поверхности с сохранением элемента площади $d\sigma$ поверхности, описываемые условием $\delta(d\sigma)=0$ (так называемые бесконечно малые A-деформации) и другие. Вопросы изгибаний поверхностей нашли отражение в работах А.Д. Александрова, А.В. Погорелова, Н.В. Ефимова, В.Т. Фоменко, С.Б. Климентова и других авторов. Вопросы G-деформаций поверхностей в евклидовом пространстве E^3 изучались в работах В.Ф. Кагана, Ю.А. Аминова, В.Т. Фоменко и других. Бесконечно малые G-деформации поверхностей в пространстве E^4 были изучены в работах В.Т. Фоменко и И.А. Бикчантаева. Задачи, связанные с бесконечно малыми A-деформациями поверхностей, изучались в работах Л.Л. Бескоровайной.

В работах О.Н. Бабенко исследовались бесконечно малые деформации поверхностей F^2 в евклидовом пространстве E^3, сохраняющие элемент площади поверхности и поточечно сферический образ поверхности (так называемые бесконечно малые AG-деформации), при различных внешних связях.

Бесконечно малые деформации поверхностей в римановом пространстве изучены не достаточно полно. Бесконечно малые деформации поверхностей, определяемые только нормальным смещением точек поверхности, в римановом пространстве изучены B.Y. Chen и K. Yano и названы бесконечно малыми нормальными деформациями.

В.Т. Фоменко была сформулирована задача о бесконечно малых деформациях поверхностей в римановом пространстве, при которых поле единичных нормальных к поверхности векторов переносится параллельно в смысле Леви-Чивита вдоль траектории точек поверхности при её деформации и остается при этом нормальным полем к деформированной поверхности. Такие деформации В.Т. Фоменко назвал бесконечно малыми G-деформациями поверхностей в римановом пространстве.

В работах В.Т. Фоменко изучались бесконечно малые G-деформации поверхностей с краем в римановом пространстве, подчиненных условию $\delta(d\sigma) = 2\lambda H c d\sigma$, где $d\sigma$ - элемент площади поверхности, H - средняя кривизна поверхности, c - нормальное смещение точек поверхности при её деформации, λ - произвольно заданный числовой параметр, называемый коэффициентом рекуррентности. Такие бесконечно малые деформации В.Т. Фоменко называет бесконечно малыми ареально-рекуррентными G-деформациями поверхностей с коэффициентом рекуррентности λ (коротко бесконечно малыми ARG-деформациями).

В работах В.Т. Фоменко изучались бесконечно малые ARG-деформации гиперповерхностей, подчиненных вдоль края внешней связи $a_{\alpha\beta} n^{\alpha} z^{\beta} = 0$, где n^{α} - единичный вектор нормали поверхности вдоль края, z^{α} - поле деформации. Эту внешнюю связь В.Т. Фоменко назвал условием защемления края гиперповерхности при её бесконечно малой ARG-деформации в римановом пространстве.

Условие защемления поверхности вдоль края является частным случаем условия обобщенной втулочной связи, записываемой в виде

$$a_{\alpha\beta} z^{\alpha} l^{\beta} = h, \tag{1}$$

где l^{α} - заданное вдоль края поверхности векторное поле, не обращающееся в ноль, h - заданная функция. В связи с этим В.Т. Фоменко поставил задачу изучения бесконечно малых ARG-деформаций поверхностей с коэффициентом рекуррентности λ при условии обобщенной втулочной связи в римановом пространстве. Эту задачу в частном случае рассматривала В.В. Сидорякина. Именно, В.В. Сидорякиной изучались бесконечно малые ARG-деформации поверхностей с коэффициентом рекуррентности λ при следующих предположениях:

1) риманово пространство является пространством L^3 типа Лобачевского; это означает, что метрика пространства L^3 в координатах (x, y, z) задается формулой $ds^2 = E(z)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, $E(z) > 0$, $E' \neq 0$;

2) поверхность с гладким краем в L^3 задается уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, имеет положительную внешнюю кривизну и является $(m+1)$-связной;

3) поверхность подвергается бесконечно малой ARG-деформации с коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda \in (A, B)$, где (A, B) - некоторый числовой интервал, определяемый поверхностью и пространством;

4) внешняя связь вдоль края поверхности является условием обобщенной втулочной связи (1), где векторное поле l^α вдоль края однозначно определяется некоторой функцией γ, h - заданная функция.

Бесконечно малые ARG-деформации поверхностей при более слабых предположениях, чем в работах В.В. Сидорякиной, ранее не изучались.

В настоящей работе изучаются бесконечно малые ARG-деформации поверхностей с коэффициентом рекуррентности λ в римановом пространстве R^3 при следующих предположениях:

1) пространство является произвольным римановым пространством R^3 с метрикой $ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, $a_{\alpha\beta} \in C^{4,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$;

2) поверхность F^2 с гладким краем задается в R^3 уравнениями $y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \overline{D}$, имеет положительную внешнюю кривизну и является $(m+1)$-связной;

3) поверхность F^2 подвергается бесконечно малой ARG-деформации с коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda \in (-\infty; +\infty)$;

4) внешняя связь вдоль края поверхности является обобщенной втулочной связью вида $a_{\alpha\beta}z^{\alpha}l^{\beta}=h$, где h - заданная функция, l^{α} - не обращающееся в ноль векторное поле, заданное вдоль края поверхности.

Важное место в теории деформаций занимают непрерывные деформации поверхностей. Непрерывные AG-деформации односвязных поверхностей в евклидовом пространстве E^3 при различных внешних связях изучались в работах О.Н. Бабенко.

В настоящей работе изучаются непрерывные ARG-деформации $(m+1)$-связных поверхностей в евклидовом пространстве E^3 при условии обобщенной втулочной связи.

Цель работы. Целью данной работы является исследование и описание поведения $(m+1)$-связных поверхностей положительной внешней кривизны при бесконечно малых (в римановом пространстве) и непрерывных (в евклидовом пространстве) ARG-деформациях, подчиненных вдоль края условию обобщенной втулочной связи.

Научная новизна диссертации. Научная новизна работы определяется следующими результатами, полученными автором:

1. Изучено поведение поверхностей положительной внешней кривизны с гладким краем в отношении бесконечно малых ARG-деформаций со всевозможными коэффициентами рекуррентности λ при заданной обобщенной втулочной связи в римановом пространстве;
2. Найдены условия, при которых поверхности положительной внешней кривизны с гладким краем в римановом пространстве допускают или не допускают бесконечно малые ARG-деформации со всевозможными коэффициентами рекуррентности λ при заданной обобщенной втулочной связи;
3. Изучено поведение поверхностей положительной внешней кривизны с гладким краем в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с фиксированным коэффициентом рекуррентности λ при различных обобщенных втулочных связях в римановом пространстве;

4. Найдены условия, при которых различные обобщенные втулочные связи являются корректными относительно бесконечно малых ARG-деформаций поверхностей положительной внешней кривизны с заданным коэффициентом рекуррентности λ в римановом пространстве;

5. Выделены однопараметрические с параметром μ, $\mu \in R$, семейства обобщенных втулочных связей, порождаемые векторными полями $l^{\alpha}_{(\mu)}$, такие, что для каждого семейства существует счетное множество $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ значений μ таких, что при $\mu = \mu_k$ обобщенная втулочная связь, порождаемая полем $l^{\alpha}_{(\mu_k)}$, является некорректной; при $\mu \neq \mu_k$ поверхность допускает единственную бесконечно малую ARG-деформацию при заданном коэффициенте рекуррентности λ и заданной обобщенной втулочной связи;

6. Изучены непрерывные ARG-деформации поверхностей положительной гауссовой кривизны с гладким краем при условии обобщенной втулочной связи в евклидовом пространстве;

7. Найдены условия, при которых поверхности положительной гауссовой кривизны в евклидовом пространстве допускают непрерывные ARG-деформации при заданной обобщенной втулочной связи.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по геометрии «в целом», а также при построении раздела спецкурса по теории деформаций поверхностей.

Апробация работы. Основные результаты данного исследования докладывались и обсуждались на научных семинарах Таганрогского государственного педагогического института имени А.П. Чехова, Казанского (Приволжского) федерального университета, Южного федерального университета и были представлены на X Всероссийском Симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи – Дагомыс, 1-8 октября 2009г.), на XVII международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2010» (Москва, 12-15 апреля 2010г.), на международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований’2011» (Одесса, 15-28 марта 2011г.), на международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях», посвященной 50-летию образования механико-математического факультета ХНУ им. В.Н. Каразина (Харьков, 17-22 апреля 2011г.), на международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований’2012» (Одесса 20-31 марта 2012 г.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в десяти работах, список которых приводится в конце автореферата. Работы [1]–[3] опубликованы в журналах, входивших в список ВАК России на момент публикации, работы [4]-[9] опубликованы в материалах международных конференций.

Связь работы с научными проектами и заданиями. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А.П. Чехова» по проекту № 1.423.2011, тема «Реализация метрик положительной кривизны в виде поверхностей с заданной опорой», научный руководитель – Фоменко В.Т.

Структура диссертации. Работа состоит из содержания, введения, четырех глав и списка литературы из 36 названий. Объем диссертации составляет 86 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава является вспомогательной. В ней изложены основные сведения для уравнений с частными производными и основные понятия римановой геометрии.

Во второй главе изучаются бесконечно малые ARG-деформации поверхностей со всевозможными коэффициентами рекуррентности λ, подчиненных фиксированной обобщенной втулочной связи.

Рассмотрим трёхмерное риманово пространство R^3 с координатами (y^α) и метрикой $ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, где $a_{\alpha\beta} \in C^{4,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$.

Пусть F^2- поверхность, заданная уравнениями $y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \overline{D}$, где y^α - функции класса $C^{3,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$, $\overline{D}$ - некоторая замкнутая область евклидовой плоскости E^2. Пусть, далее, граница ∂D области $\overline{D}$ принадлежит классу $C^{2,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Эти условия будем называть условиями регулярности поверхности F^2 в римановом пространстве R^3.

Пусть поверхность F^2 подвергнута бесконечно малой деформации F_ε^2: $y_\varepsilon^\alpha(x^1, x^2) = y^\alpha(x^1, x^2) + \varepsilon z^\alpha(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \overline{D}$, где ε - малый параметр, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, z^α - поле бесконечно малой деформации.

Бесконечно малую деформацию $\{F_\varepsilon^2\}$ поверхности F^2 называют бесконечно малой ареально-рекуррентной G-деформацией с коэффициентом рекуррентности λ (коротко бесконечно малой ARG-деформацией), если выполняются условия: 1) вариация $\delta(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ поверхности F^2 удовлетворяет соотношению $\delta(d\sigma) = 2\lambda H(a_{\alpha\beta} z^\alpha n^\beta) d\sigma$, где H - средняя кривизна поверхности F^2, λ - заданное число, называемое коэффициентом рекуррентности, n^α - поле единичных векторов нормалей к поверхности F^2;

2) деформация поверхности F^2 является бесконечно малой G-деформацией, то есть для любой точки поверхности F^2 её единичный вектор нормали n^α, параллельно перенесенный в R^3 в смысле Леви-Чивита в направлении вектора z^α в соответствующую точку поверхности F_ε^2, совпадает с вектором нормали n_ε^α к F_ε^2 в этой точке.

Бесконечно малую деформацию поверхности F^2 с полем $z^\alpha \equiv 0$ называют тождественной.

Будем говорить, что поверхность F^2 является λ-жёсткой в отношении бесконечно малых ARG-деформаций, если для заданного коэффициента рекуррентности λ поверхность допускает только тождественные бесконечно малые ARG-деформации, в противном случае поверхность будем называть λ-нежёсткой.

Зададим на краю ∂F^2 поверхности F^2 векторное поле l^α, $a_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta \neq 0$. Пусть поверхность F^2 при бесконечно малой ARG-деформации подчинена вдоль края условию

$$a_{\alpha\beta} z^\alpha l^\beta = h, \qquad (2)$$

где h - заданная функция класса $C^{1,\nu}(\partial D)$, $0 < \nu < 1$.

Определение 1. Условие (2) назовём условием обобщенной втулочной связи.

Определение 2. Обобщенная втулочная связь (2) называется твёрдой обобщенной втулочной связью, если $h \equiv 0$. Указанная обобщенная втулочная связь имеет вид

$$a_{\alpha\beta} z^\alpha l^\beta = 0. \qquad (3)$$

Определение 3. Обобщенная втулочная связь называется мягкой, если $h \not\equiv 0$.

Далее будем изучать бесконечно малые ARG-деформации поверхности F^2 при условии твердой обобщенной втулочной связи (3). Представим поле деформации z^α в виде $z^\alpha = a^i y,_i^\alpha + c n^\alpha$, а поле l^α в виде $l^\alpha = l_\tau^\alpha + l_n^\alpha$, где $l_\tau^\alpha = l^i y,_i^\alpha$ - касательная составляющая поля l^α, $l_n^\alpha = l^3 n^\alpha$ - нормальная составляющая поля l^α, l^1, l^2, l^3 - заданные функции класса $C^{1,\nu}(\partial D)$, $0 < \nu < 1$.

Для формулировки полученных результатов введем в рассмотрение правый сопровождающий репер $\{t^\alpha, \eta^\alpha, n^\alpha\}$ края ∂F^2 поверхности F^2 в римановом пространстве R^3, где t^α - поле единичных векторов касательных к краю ∂F^2, η^α - поле единичных векторов тангенциальных нормалей к краю ∂F^2, n^α - поле единичных векторов нормалей к краю ∂F^2.

Теорема 1. Пусть F^2 - $(m+1)$-связная поверхность положительной внешней кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$, в римановом пространстве R^3, удовлетворяющая условиям регулярности и ориентированная так, что её средняя кривизна $H > 0$. Пусть, далее, поверхность F^2 подвергнута бесконечно малой ARG-деформации с произвольно заданным коэффициентом рекуррентности λ. Подчиним поверхность F^2 при указанной деформации условию твердой обобщенной втулочной связи (3), где поле l^α таково, что $a_{\alpha\beta} l^\alpha \eta^\beta < 0$. Тогда существует не более чем счетное множество λ_i $(i = 1,2,\ldots)$ значений λ таких, что

1) при $\lambda = \lambda_i$ поверхность F^2 является λ_i-нежесткой в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с коэффициентом рекуррентности λ_i при заданной твердой обобщенной втулочной связи; для каждого значения λ_i поверхность F^2 допускает конечное число линейно независимых векторных полей смещений z^α класса $C^{1,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$, определяющих бесконечно малые ARG-деформации с коэффициентом рекуррентности λ_i;

2) при $\lambda \neq \lambda_i$ поверхность F^2 является λ-жесткой в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с коэффициентом рекуррентности λ при заданной твердой обобщенной втулочной связи.

Представляет интерес нахождение условий, при которых существует точно счетное множество значений λ таких, что поверхность является λ-нежесткой в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с коэффициентом рекуррентности λ при заданной твердой обобщенной втулочной связи.

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть F^2 - $(m+1)$-связная поверхность положительной внешней кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$, в римановом пространстве R^3, удовлетворяющая условиям регулярности и ориентированная так, что её средняя кривизна $H > 0$. Пусть, далее, поверхность F^2 подвергнута бесконечно малой ARG-деформации с коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda > -1$. Подчиним поверхность F^2 при указанной деформации условию твердой обобщенной втулочной связи (3), где поле l^α таково, что $a_{\alpha\beta} l^\alpha \eta^\beta < 0$, $a_{\alpha\beta} l^\alpha n^\beta < 0$ и касательная составляющая l_τ^α сопряжена с направлением края t^α поверхности. Тогда существует точно счетное множество $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ значений λ, $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_i < \ldots$, $\lambda_i \to \infty$ при $i \to \infty$, таких, что

1) при $\lambda = \lambda_i$ поверхность F^2 является λ_i-нежесткой в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с коэффициентом рекуррентности λ_i при заданной твердой обобщенной втулочной связи; для каждого значения λ_i поверхность F^2 допускает конечное число линейно независимых векторных полей смещений z^α класса $C^{1,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$, определяющих бесконечно малые ARG-деформации с коэффициентом рекуррентности λ_i;

2) при $\lambda \neq \lambda_i$, $\lambda > -1$, поверхность F^2 является λ-жесткой в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с коэффициентом рекуррентности λ при заданной твердой обобщенной втулочной связи.

В третьей главе изучается поведение поверхностей, подвергнутых бесконечно малой ARG-деформации с заданным коэффициентом рекуррентности λ. Поверхность при деформации подчиняется различным обобщенным втулочным связям. Из этих связей выделяются корректные и некорректные обобщенные втулочные связи.

Для формулировки дальнейших результатов введем определения корректной и некорректной обобщенной втулочной связи.

Определение 4. Обобщенная втулочная связь называется корректной, если для любой функции h существует единственное поле деформации z^α, удовлетворяющее условию (2), при этом малому изменению (в смысле некоторой нормы) функции h соответствует малое изменение поля z^α. При $h \equiv 0$ поле деформации сводится к нулевому полю: $z^\alpha \equiv 0$.

Определение 5. Обобщенная втулочная связь называется некорректной, если при $h \not\equiv 0$ поверхность допускает бесконечно малые деформации лишь при выполнении конечного числа условий разрешимости, налагаемых на функцию h, а при $h \equiv 0$ поверхность допускает конечное число линейно независимых полей смещений z^α, отличных от нулевых.

Доказана следующая

Теорема 3. Пусть F^2 - $(m+1)$-связная поверхность положительной внешней кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$, в римановом пространстве R^3, удовлетворяющая условиям регулярности и ориентированная так, что её средняя кривизна $H>0$. Пусть, далее, поверхность F^2 подвергнута бесконечно малой ARG-деформации с заданным коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda<-1$. Подчиним поверхность F^2 при указанной деформации условию обобщенной втулочной связи (2), где поле l^α таково, что $a_{\alpha\beta}l^\alpha\eta^\beta<0$ и $a_{\alpha\beta}l^\alpha n^\beta<0$. Тогда рассматриваемая обобщенная втулочная связь является корректной в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с заданным коэффициентом рекуррентности λ. Причем поле смещения z^α принадлежит классу $C^{1,\nu}(\overline{D})$, $0<\nu<1$, а его нормальная составляющая cn^α принадлежит классу $C^{2,\nu}(\overline{D})$, $0<\nu<1$.

Исследуем корректность обобщенной втулочной связи $a_{\alpha\beta}z^\alpha l^\beta=h$, освободившись от требования $a_{\alpha\beta}l^\alpha n^\beta<0$, налагаемого на поле l^α в теореме 3. Для изучения этого вопроса исследуем поведение поверхности при обобщенных втулках, которые выбираются из некоторого семейства обобщенных втулок. С этой целью рассмотрим заданное вдоль края поверхности F^2 семейство векторных полей $l^\alpha_{(\mu)}=l^\alpha_\tau+\mu l^3_0 n^\alpha$, $a_{\alpha\beta}l^\alpha_{(\mu)}l^\beta_{(\mu)}\neq0$, где l^3_0 - заданная функция класса $C^{1,\nu}(\partial D)$, $0<\nu<1$, μ - числовой параметр. Каждое поле этого семейства порождает обобщенную втулочную связь

$$a_{\alpha\beta}z^\alpha l^\beta_{(\mu)}=h. \tag{4}$$

Если параметр μ и функция l^3_0 выбраны так, что $\mu l^3_0<0$, то имеют место результаты теоремы 3. Изучим случай, когда $\mu l^3_0>0$. Поведение поверхности, подчиненной таким обобщенным втулочным связям, дается следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть F^2 - $(m+1)$-связная поверхность положительной внешней кривизны $K\geq k_0>0$, $k_0=const$, в римановом пространстве R^3, удовлетворяющая условиям регулярности и ориентированная так, что средняя кривизна $H>0$. Пусть, далее, поверхность F^2 подвергнута бесконечно малой ARG-деформации с заданным коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda<-1$. Подчиним поверхность F^2 при указанной деформации условию обобщенной втулочной связи (4), где поле $l^{\alpha}_{(\mu)}$ удовлетворяет следующим условиям: $a_{\alpha\beta} l^{\alpha}_{(\mu)} \eta^{\beta} < 0$, касательная составляющая l^{α}_{τ} сопряжена с направлением края t^{α} поверхности и $l^{3}_{0} > 0$. Тогда существует точно счетное множество $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ значений μ, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \ldots$, $\mu_k \to \infty$ при $k \to \infty$, таких, что при заданном μ

а) $\mu = \mu_k$, рассматриваемая обобщенная втулочная связь является некорректной в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с заданным коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda < -1$;

б) $\mu \neq \mu_k$, $\mu > 0$, поверхность F^2 допускает единственную бесконечно малую ARG-деформацию с заданным коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda < -1$, при рассматриваемой обобщенной втулочной связи.

В четвертой главе диссертации ставится задача доказательства существования непрерывных ARG-деформаций поверхности положительной гауссовой кривизны, совместимых с обобщенной втулочной связью, в евклидовом пространстве. Изучение поставленной задачи сводится к исследованию разрешимости системы из одного квазилинейного и двух линейных уравнений относительно трех искомых функций в области $\overline{D}$ с линейным краевым условием на границе ∂D.

Пусть F^2 - поверхность в евклидовом пространстве E^3, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \overline{D}$, $\overline{D}$ - некоторая замкнутая область евклидовой плоскости E^2, $\vec{r} \in C^{3,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$. Пусть, далее, граница ∂D области $\overline{D}$ принадлежит классу $C^{2,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Эти условия будем называть условиями регулярности поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^3.

Рассмотрим деформацию F^2_t поверхности F^2, порождаемую параметром t, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, и заданную уравнением $\vec{r}_t(x^1, x^2) = \vec{r}(x^1, x^2) + \vec{z}_t(x^1, x^2)$, где $\vec{z}_t(x^1, x^2)$ - векторное поле смещения точек поверхности F^2 при её деформации, $(x^1, x^2) \in \overline{D}$.

Будем говорить, что поверхность F^2 допускает непрерывную деформацию класса $C^{1,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$, порождаемую параметром t, если:

1) существует семейство полей смещений $\{\bar{z}_t\}$, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, непрерывно зависящих от параметра t;

2) при $t = 0$ поля смещений $\bar{z}_t$ тождественно равны нулю;

3) для всех значений параметра t из промежутка $(-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, векторные поля $\bar{z}_t$ принадлежат классу $C^{1,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$.

Деформацию F_t^2 поверхности F^2 называют ареально-рекуррентной G-деформацией с коэффициентом рекуррентности λ (коротко ARG-деформацией), если выполняются условия: 1) приращение $\Delta(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ поверхности F^2 удовлетворяет соотношению $\Delta(d\sigma) = 2\lambda H(\vec{z}_t, \vec{n})d\sigma$, где H - средняя кривизна поверхности F^2, λ - заданное число, называемое коэффициентом рекуррентности, $\vec{n}$ - поле единичных векторов нормалей к поверхности F^2; 2) деформация поверхности F^2 является G-деформацией, т.е. приращение единичного вектора нормали $\vec{n}$ в каждой точке поверхности F^2 равно нулю: $\Delta\vec{n} = 0$.

Введем понятие обобщенной втулочной связи в евклидовом пространстве E^3. Зададим на краю ∂F^2 поверхности F^2 векторное поле $\vec{l}$, $\vec{l} \neq 0$, класса $C^{1,\nu}(\partial D)$, $0 < \nu < 1$. Пусть поверхность F^2 при непрерывной ARG-деформации подчинена вдоль края условию

$$(\bar{z}_t, \vec{l}) = h_t, \tag{5}$$

где h_t - заданная функция класса $C^{1,\nu}(\partial D)$, $0 < \nu < 1$, непрерывно зависящая от параметра t, $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, $h_0 \equiv 0$.

Определение 6. Условие (5) назовём условием обобщенной втулочной связи.

Для формулировки полученного результата введем в рассмотрение правый сопровождающий репер $\{\vec{t}, \vec{\eta}, \vec{n}\}$ края ∂F^2 поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^3, где $\vec{t}$ - поле единичных векторов касательных к краю ∂F^2, $\vec{\eta}$ - поле единичных векторов тангенциальных нормалей к краю ∂F^2, $\vec{n}$ - поле единичных векторов нормалей к краю ∂F^2.

Имеет место следующая

Теорема 5. Пусть F^2 - $(m+1)$-связная поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = const$, в евклидовом пространстве E^3, удовлетворяющая условиям регулярности и ориентированная так, что её средняя кривизна $H > 0$. Пусть, далее, поверхность F^2 подвергнута непрерывной ARG-деформации с заданным коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda < -1$. Подчиним поверхность F^2 при указанной деформации условию обобщенной втулочной связи (5), где поле $\vec{l}$ таково, что $(\vec{l}, \vec{n}) < 0$ и $(\vec{l}, \vec{\eta}) < 0$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, зависящее от поверхности F^2, что при $\|h_t\|_{C^{1,\nu}(\partial D)} < \varepsilon$ поверхность F^2 допускает непрерывную ARG-деформацию класса $C^{1,\nu}(\overline{D})$, $0 < \nu < 1$, с коэффициентом рекуррентности λ, где $\lambda < -1$, совместимую с заданной обобщенной втулочной связью.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.Т. Фоменко за постановку задачи, внимательное руководство и помощь при выполнении работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Найдены условия, при которых поверхности положительной внешней кривизны в римановом пространстве являются жесткими или нежесткими в отношении бесконечно малых ARG-деформаций со всевозможными коэффициентами рекуррентности λ при заданной обобщенной втулочной связи;
2. Найдены условия, при которых различные обобщенные втулочные связи являются корректными относительно бесконечно малых ARG-деформаций поверхностей положительной внешней кривизны с заданным коэффициентом рекуррентности λ в римановом пространстве;
3. Выделены однопараметрические с параметром μ, $\mu \in R$, семейства обобщенных втулочных связей, порождаемые векторными полями $l^{\alpha}_{(\mu)}$, такие, что для каждого семейства существует счетное множество $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ значений μ таких, что при $\mu = \mu_k$ обобщенная втулочная связь, порождаемая полем $l^{\alpha}_{(\mu_k)}$,

является некорректной; при $\mu \neq \mu_k$ поверхность допускает единственную бесконечно малую ARG-деформацию при заданном коэффициенте рекуррентности λ и заданной обобщенной втулочной связи;

4. Найдены условия, при которых поверхности положительной гауссовой кривизны в евклидовом пространстве допускают непрерывные ARG-деформации при заданной обобщенной втулочной связи.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в ведущих научных журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Коломыцева Е.А. ARG-деформации поверхностей в римановом пространстве / Е.А. Коломыцева // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. –Т. 16. – Вып. 6. – с. 1077-1078. (0,08 п.л.)

2. Коломыцева Е.А. Существование нетривиальных ARG-деформаций поверхностей с краем при обобщенных втулочных связях в римановом пространстве / Е.А. Коломыцева, В.Т. Фоменко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. - №3 (15). – С. 3-14. (диссертанта – 0,8 п.л.)

3. Коломыцева Е.А. Существование обобщенных втулочных связей, совместимых с ARG-деформациями поверхностей в римановом пространстве / Е.А. Коломыцева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. - №4 (16). – С. 14-25. (0,9 п.л.)

Публикации в других изданиях

4. Коломыцева Е.А. Бесконечно малые ARG-деформации поверхностей с краем при обобщенных втулочных связях в римановом пространстве / Е.А. Коломыцева // Сборник научных трудов SWorld. Материалы международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований’2012» (Одесса, 20-31 марта 2012 г.). – Выпуск 1. Том 11. – Одесса: КУПРИЕНКО, 2012. - С. 21-23. (0,12 п.л.)

5. Коломыцева Е.А. Корректные обобщенные втулочные связи при бесконечно малых ARG-деформациях поверхностей с коэффициентом рекуррентности $\lambda < -1$ в римановом пространстве / Е.А. Коломыцева // Сборник материа-

лов II Международной научно-практической конференции «Наука и современность - 2010» (Новосибирск, 16 апреля 2010г.). - Часть 3. – Новосибирск: Издательство «СИБПРИНТ», 2010. – с. 59-64. (0,3 п.л.)

6. Коломыцева Е.А. Непрерывные ARG-деформации поверхности при условии обобщенного скольжения / Е.А. Коломыцева // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Тезисы докладов международной конференции (Харьков, 17-22 апреля 2011г.). - Харьков:"Апостроф". – 2011. – С.144-145. (0,12 п.л.)

7. Коломыцева Е.А. Непрерывные ARG-деформации поверхности с краем при условии обобщенной втулочной связи / Е.А. Коломыцева // Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований’2011». Том 8. Физика и математика (Одесса, 15-28 марта 2011г.). – Одесса: Черноморье, 2011. - с. 52-54. (0,12 п.л.)

8. Коломыцева Е.А. О жесткости поверхностей в отношении бесконечно малых ARG-деформаций в римановом пространстве / Е.А. Коломыцева // Сборник материалов I Международной студенческой научно-практической конференции «Интеллектуальный потенциал XXI века: ступени познания» (Новосибирск, 21апреля 2010г.). – Новосибирск: Издательство «СИБПРИНТ», 2010. - с. 230-233. (0,23 п.л.)

9. Коломыцева Е.А. О корректности втулочных связей при бесконечно малых ARG-деформациях поверхностей в римановом пространстве / Е.А. Коломыцева // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2010» (Москва, 12-15 апреля 2010г.)[Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). (0,2 п.л.)

10. Коломыцева Е.А. О корректных втулочных связях при бесконечно малых ARG-деформациях поверхностей в римановом пространстве R^3 / Е.А. Коломыцева // Вестник Таганрогского государственного педагогического института. Физико-математические и естественные науки. – Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2010. – №1. – с. 11-16. (0,63 п.л.)